

Exercice 1

6 points

Dans cet exercice, tous les résultats seront arrondis à 10^{-3} près en cas de besoin.
Les deux parties de cet exercice sont indépendantes l'une de l'autre.

Partie A

Au tennis, le joueur qui est au service peut, en cas d'échec lors du premier service, servir une deuxième balle.

En match, Abel réussit son premier service dans 70 % des cas. Lorsque le premier service est réussi, il gagne le point dans 80 % des cas.

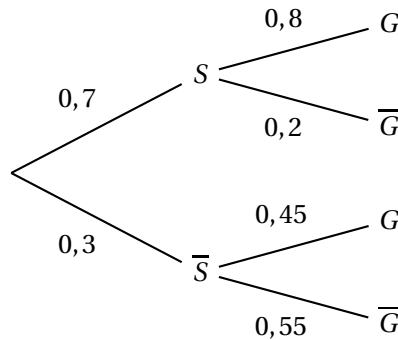
En revanche, après un échec à son premier service, Abel gagne le point dans 45 % des cas. Abel est au service.

On considère les évènements suivants :

- S : « Abel réussit son premier service » ;
- G : « Abel gagne le point ».

1. \bar{S} est l'évènement : « Abel ne réussit pas son premier service. ».

On traduit la situation par un arbre pondéré.



2. $P(S \cap G) = P(S) \times P_S(G) = 0,7 \times 0,8 = 0,56$

3. $\{S, \bar{S}\}$ forme une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales, on a : $P(G) = P(S \cap G) + P(\bar{S} \cap G) = 0,56 + 0,3 \times 0,45 = 0,695$

4. Abel a gagné le point. La probabilité qu'il ait réussi son premier service est :

$$P_G(S) = \frac{P(S \cap G)}{P(G)} = \frac{0,56}{0,695} \approx 0,806$$

5. On a :

- $P(S \cap G) = 0,56$
- $P(S) \times P(G) = 0,7 \times 0,695 = 0,4865$

$P(S \cap G) \neq P(S) \times P(G)$ donc les évènements S et G ne sont pas indépendants.

Partie B

À la sortie d'une usine de fabrication de balles de tennis, une balle est jugée conforme dans 85 % des cas.

1. On teste successivement 20 balles. On considère que le nombre de balles est suffisamment grand pour assimiler ces tests à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de balles conformes parmi les 20 testées.
 - a. L'épreuve élémentaire consiste à voir si une balle est conforme, avec une probabilité de 0,85, ou si elle ne l'est pas.
On exécute cette épreuve élémentaire 20 fois et on considère que le nombre de balles est suffisamment grand pour assimiler ces tests à un tirage avec remise.
Donc la variable aléatoire X qui compte le nombre de balles conformes parmi les 20 testées, suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,85$.
 - b. À la calculatrice, $P(X \leq 18) \approx 0,824$.
 - c. La probabilité qu'au moins deux balles ne soient pas conformes parmi les 20 balles testées est égale à la probabilité qu'au plus 18 balles soient conformes, c'est-à-dire $P(X \leq 18)$ soit environ 0,824.
 - d. L'espérance de X est $E(X) = np = 20 \times 0,85 = 17$.
2. On teste maintenant n balles successivement. On considère les n tests comme un échantillon de n variables aléatoires X indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre 0,85.

On considère la variable aléatoire $M_n = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n} = \frac{X_1}{n} + \frac{X_2}{n} + \frac{X_3}{n} + \dots + \frac{X_n}{n}$

- a. D'après le cours, on peut dire que les n variables aléatoires X indépendantes qui suivent la loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,85$ ont pour espérance $p = 0,85$ et pour variance $p(1-p) = 0,85 \times 0,15 = 0,1275$.

Soit S_n la loi somme définie par $S_n = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

- D'après la linéarité de l'espérance, on a :

$$E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = \sum_{i=1}^n 0,85 = 0,85n$$

- Les variables X_i étant indépendantes, on utilise l'additivité de la variance :

$$V(S_n) = V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) = \sum_{i=1}^n 0,1275 = 0,1275n$$

M_n est la loi moyenne définie par $M_n = \frac{S_n}{n}$.

- On sait que $E(aX) = aE(X)$, donc :

$$E(M_n) = E\left(\frac{1}{n}S_n\right) = \frac{1}{n}E(S_n) = \frac{0,85n}{n} = 0,85.$$

- On sait que $V(aX) = a^2V(X)$ donc :

$$V(M_n) = V\left(\frac{1}{n}S_n\right) = \frac{1}{n^2}V(S_n) = \frac{0,1275n}{n^2} = \frac{0,1275}{n}.$$

- b. Si X est une variable aléatoire et t un réel strictement positif, on a :

$$P(|X - E(X)| \geq t) \leq \frac{V(X)}{t^2}. \text{ C'est l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.}$$

On en déduit que : $P(|X - E(X)| < t) \geq 1 - \frac{V(X)}{t^2}$. Donc :

$$\begin{aligned} P(|X - E(X)| < t) \geq 1 - \frac{V(X)}{t^2} &\iff P(|M_n - E(M_n)| < t) \geq 1 - \frac{V(M_n)}{t^2} \\ &\iff P(|M_n - 0,85| < t) \geq 1 - \frac{0,1275}{nt^2} \end{aligned}$$

On prend $t = 0,1$. On a donc :

- $|M_n - 0,85| < t \iff |M_n - 0,85| < 0,1 \iff -0,1 < M_n - 0,85 < 0,1$
 $\iff 0,75 < M_n < 0,95$
- $1 - \frac{0,1275}{nt^2} = 1 - \frac{0,1275}{n \times 0,1^2} = 1 - \frac{12,75}{n}$

On déduit donc : $P(0,75 < M_n < 0,95) \geq 1 - \frac{12,75}{n}$.

- c.** Pour trouver un entier n tel que la moyenne du nombre de balles conformes pour un échantillon de taille n appartienne à l'intervalle $]0,75; 0,95[$ avec une probabilité supérieure à $0,9$, il suffit que : $1 - \frac{12,75}{n} \geq 0,9$. On résout cette inéquation.

$$1 - \frac{12,75}{n} \geq 0,9 \iff 0,1 \geq \frac{12,75}{n} \iff 0,1n \geq 12,75 \iff n \geq 127,5$$

Donc il faut un échantillon de taille supérieure à $n = 128$ pour que la moyenne du nombre de balles conformes appartenant à l'intervalle $]0,75; 0,95[$ ait une probabilité supérieure à $0,9$